# Definições em Álgebra Linear

Pedro Roger M. Vasconcelos
Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação - MDCC
Grupo de Redes de Computadores, Engenharia de Software e Sistemas - GREat
Universidade Federal do Ceará
Email: pedrovasconcelos@great.ufc.br

***Resumo*—Um guia de consulta rápida às principais definições de Álgebra Linear.**

## I. MATRIZES

$$\mathbf{A}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matriz Quadrada $m = n$
Matriz Nula ($0_{mxn}$): $a_{ij} = 0, \forall i, j$
Matriz Coluna $n = 1$
Matriz Linha $m = 1$
Matriz Diagonal: $m = n$ e $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
Matriz Identidade: $m = n$, $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior: $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica: $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$, $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{nxm} \mid b_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3x2} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

*1) Propriedades:*

*Adição:*

$$\mathbb{R}^{mxn} X \mathbb{R}^{mxn} \to \mathbb{R}^{mxn}$$

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

*i)* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade)
*ii)* $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
*iii)* $\mathbf{A} + 0_{mxn} = \mathbf{A}$ (matriz nula)

*Multiplicação por escalar:*

$$\mathbb{R} X \mathbb{R}^{mxn} \to \mathbb{R}^{mxn}$$

$$C = \alpha A \Rightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

*i)* $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
*ii)* $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
*iii)* $0 * \mathbf{A} = 0_{mxn}$
*iv)* $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1 k_2)\mathbf{A}$

*Transposição:*

$$\mathbb{R}^{mxn} \to \mathbb{R}^{nxm}$$

$$C = A^T \Rightarrow c_{ij} = a_{ji}$$

*i)* Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$
*ii)* $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$
*iii)* $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
*iv)* $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$

*Multiplicação de Matrizes:*

$$\mathbb{R}^{mxp} X \mathbb{R}^{pxn} \to \mathbb{R}^{mxn}$$

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

*i)* Em geral, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
*ii)* $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
*iii)* $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda, em relação à soma)
*iv)* $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direita, em relação à soma)
*v)* $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
*vi)* $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$
*vii)* $0 * \mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{A} * 0 = 0$

## II. Vetores

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} x_i \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \dots, x_n)$$

Assumindo $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$, temos as seguintes operações com vetores:

### A. Adição

$$z = x + y \Rightarrow z_i = x_i + y_i$$

### B. Multiplicação por escalar

$$z = ax \Rightarrow z_i = ax_i$$

### C. Produto interno

$$c = x^T y \Rightarrow C = \sum_{i=i}^{n} x_i y_i$$

$c = 0$;
**for** $i = 1 : n$ **do**
| $c = c + x(i)y(i)$
**end**

**Algorithm 1:** Produto interno ($c = x^Y y$) para $x, y \in \mathbb{R}^n$

### D. Multiplicação de vetores (ou Produto de Hadamard)

$$z = x.*y \Rightarrow z_i = x_i y_i$$

### E. Saxpy (Scalar a x plus y)

$$y = ax + y \Rightarrow y_i = ax_i + y_i$$

**for** $i = 1 : n$ **do**
| $y(i) = ax(i) + y(i)$
**end**

**Algorithm 2:** Saxpy ($y_i = ax_i + y_i$) para $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$

### F. Multiplicação Matriz x Vetor

Seja $A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ :

$$y = Ax + y$$

*1) Gaxpy (Generalized saxpy):* Utiliza uma componente da matriz A por vez.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, i = 1 : m$$

**for** $i = 1 : m$ **do**
  **for** $j = 1 : n$ **do**
  | $y(i) = A(i,j)x(j) + y(i)$
  **end**
**end**

**Algorithm 3:** Gaxpy: versão linha. Se $A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, então esse algoritmo sobrescreve $y$ com $Ax + y$

**for** $j = 1 : n$ **do**
  **for** $i = 1 : m$ **do**
  | $y(i) = A(i,j)x(j) + y(i)$
  **end**
**end**

**Algorithm 4:** Gaxpy: versão coluna. Se $A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, então esse algoritmo sobrescreve $y$ com $Ax + y$

### G. Partição de Matrizes

Uma matriz é uma pilha de vetores linha:

$$A \in \mathbb{R}^{mxn} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix} r_k \in \mathbb{R}^n$$

Isso é chamada partição linha de $A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, r_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, r_2^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}, r_3^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

**for** $i = 1 : m$ **do**
| $y_i = r_i^T x + y(i)$
**end**

**Algorithm 5:** Algoritmo 3 rescrito com particionamento de linhas

Alternativamente, uma matriz é uma coleção de vetores coluna.

$$A \in \mathbb{R}^{mxn} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} c_1, \dots, c_n \end{bmatrix}, c_k \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**for** $j = 1 : n$ **do**
| $y = x_j c_j + y$
**end**

**Algorithm 6:** Algoritmo 4 rescrito com particionamento de colunas

### H. Notação de dois pontos

Se $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, então $A(K,:)$ designa a $k$-ésima linha, i.e.,

$$A(k,:) = [a_{k1}, \ldots, a_{kn}]$$

A $k$-ésima coluna é especificada por:

$$A(:,k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

### I. Atualização do Produto Externo

$$A = A + xy^T | A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

**for** $i = 1 : m$ **do**
  **for** $j = 1 : n$ **do**
    $a_{ij} = a_{ij} = a_i y_i$
  **end**
**end**

**Algorithm 7:** Produto externo

**for** $i = 1 : m$ **do**
  $A(i,:) = A(i,:) + x(i)y^T$
**end**

**Algorithm 8:** Produto externo versão coluna

**for** $j = 1 : n$ **do**
  $A(:,j) = a(:,j) + y(j)x$
**end**

**Algorithm 9:** Produto externo versão linha

### J. Multiplicação Matriz x Matriz

Seja, $A$ e $B \in \mathbb{R}^{2x2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix}$$

Versão saxpy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \left[5\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, 6\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right]$$

Versão produto externo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}$$

**for** $i = 1 : m$ **do**
  **for** $j = 1 : n$ **do**
    **for** $k = 1 : p$ **do**
      $C(i,j) = A(i,k)B(k,j) + C(i,j)$
    **end**
  **end**
**end**

**Algorithm 10:** Multiplacação de matrizes: Variação $i, j, k$

Tabela I
MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES: ORDENAÇÃO DE LOOPS E PROPRIEDADES

| Loop Order | Inner Loop | Middle Loop | Inner Loop Data Access |
|---|---|---|---|
| $ijk$ | dot | vector x matrix | A by row, B by column |
| $jik$ | dot | matrix x vector | A by row, B by column |
| $ikj$ | saxpy | row gaxpy | B by row, C by row |
| $jki$ | saxpy | column gaxpy | A by column, C by column |
| $kij$ | saxpy | row outer product | B by row, C by row |
| $kji$ | saxpy | column outer product | A by column, C by column |

### K. Especificações de Níveis Escalares

$$C = AB + C, A \in \mathbb{R}^{mxp}, B \in \mathbb{R}^{pxn}, C \in \mathbb{R}^{mxn}$$

## III. Sistemas de Equações Lineares

Forma matricial de um sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{coeficientes}} * \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\text{icógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\text{termos independentes}}$$

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

### A. Operações Elementares

*i)* Permuta das *i*-ésima e *j*-ésima linhas $(L_i \longleftrightarrow L_j)$

*ii)* Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar não nulo $k$ $(L_i \longleftrightarrow kL_j)$

*iii)* Substituiçã da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha mais $k$ vezes a *j*-ésima $(L_i \longleftrightarrow L_i + kL_j)$

Se **A** e **B** são matrizes $m$ X $n$, dizemos que **B** é *linha equivalente* de **A**, se **B** for obtida através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de **A**. Notações: **A** $\rightarrow$ **B** ou **A** $\sim$ **B**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pois}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -1L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### *B. Forma Escada ou escalonada*

*i)* O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

*ii)* Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

*iii)* Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas

*iv)* Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha $i$ ocorre na coluna $k_i$ então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{Matriz em forma escada ou escalonada}$$

**Teorema 1.** *Toda matriz $\mathbf{A}_{mxn}$ é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.*

*1) Posto:* Dada uma matriz $\mathbf{A}_{mxn}$, seja $\mathbf{B}_{mxn}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a $\mathbf{A}$ O *posto* de $\mathbf{A}$, denotado por $p$, é o número de linhas de $\mathbf{B}$.

*2) Nulidade:* A *nulidade* é o número $n-p$ (diferença entre colunas de $\mathbf{A}$ e o posto).

### *C. Soluções de um sistema de equações lineares*

*1) Sistema impossível:* A matriz ampliada possui uma linha da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \forall x \neq 0$$

*2) Sistema possível:* Nenhuma linha da forma anterior

Todas as colunas possuem elemento pivô? *Sistema possível e determinado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 9$$

Alguma coluna sem elemento pivô? *Sistema possível e indeterminado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \{x_3 \text{ é livre}, x_1 = -18 + x_3, x_2 = 9 - 2X_3$$

## IV. Determinante e Matriz Inversa

Número associado a uma matriz quadrada, notação: det $\mathbf{A}$ ou $|\mathbf{A}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{2x2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### *A. Regra de Sarrus*

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}_{3x3}$$

### *B. Teorema de Cramer*

$\forall j, 1 \leq j \leq n$, a solução do sistema $x_j$ é dada por:

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|} = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Em que $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes e $\mathbf{A}_j$ é a matriz que se obtém da matriz $\mathbf{A}$ substituindo a coluna $j$ pela coluna dos termos independentes $b$.

Dado,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

$x_1$ e $x_2$ podem ser calculados como:

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{9*3+1*13}{3*3-1*2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{3*13-9*2}{3*3-1*2} = 3$$

### *C. Teorema de Laplace*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}_{4x4} = a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} + a_{41}\Delta_{41}$$

### *D. Matriz dos Cofatores*

Dada uma matriz $\mathbf{A}$, o cofator $\Delta_{ij}$ do elemento $a_{ij}$ da matriz é $(-1)^{i+j}$det $\mathbf{A}_{ij}$, onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz de $\mathbf{A}$, obtida extraindo-se a $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna.

Cofator: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$

Matriz dos cofatores:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Delta_{ij} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{nxn} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

### E. Matriz Adjunta

Dada uma matriz quadrada **A**, chamaremos de *matriz adjunta* de **A** à transposta da matriz dos cofatores de **A**.

$$\text{adj }\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}'$$

**Teorema 2.** $\boldsymbol{A} * \bar{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{A} * (adj\ \boldsymbol{A}) = (det\ \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n$

$$\mathbf{A} * (\text{adj }\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_3$$

### F. Matriz Inversa

**Definição 1.** *Dada uma matriz quadrada* $\boldsymbol{A}$ *de ordem* $n$*, chamamos de inversa de* $\boldsymbol{A}$ *a uma matriz* $\boldsymbol{B}$ *tal que* $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$*, onde* $\boldsymbol{I}_n$ *é a matriz identidade de ordem* $n$*. Escrevemos* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *para a inversa de* $\boldsymbol{A}$*.*

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Procuremos sua inversa, isto é,
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ e $\mathbf{B} * \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos

$$a = 2, b = -1, c = -\frac{11}{2} \text{ e } d = 3$$

Temos então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou seja, } \mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Também $\mathbf{B} * \mathbf{A} = \mathbf{I}$ e, portanto, **B** é a inversa da matriz **A**. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

*Observações:*

*i)* Se **A** e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é, existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB}^{-1}) = \mathbf{B}^{-1} * \mathbf{A}^{-1}$.

*ii)* Se **A** é uma matriz quadrada e existe uma matriz **B** tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível, ou seja $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, além disso, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

*iii)* Nem toda matriz tem inversa.

Para mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, é suficiente mostrar que a equação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem solução.

Isto é verdade, pois
$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ implica que $2c = 1$ e $c = 0$, e não podemos ter essas igualdades simultaneamente.

**Teorema 3.** *Uma matriz quadrada* $\boldsymbol{A}$ *admite uma inversa se, e somente se* $det\ \boldsymbol{A} \neq 0$*. Neste caso:*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det\ \boldsymbol{A}}(adj\ \boldsymbol{A})$$

Consideremos a matriz anterior:

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 24 - 22 = 2 \neq 0$, e portanto, existe a inversa de **A**. Calculemos sua inversa pela relação $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}(\text{adj }\mathbf{A})$.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\text{adj }\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

### G. Matrizes Elementares

**Definição 2.** *Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.*

**Teorema 4.** *Se* $\boldsymbol{A}$ *é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de* $\boldsymbol{A}$ *é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar* $\mathbf{E}$ *correspondente à operação com linhas pela matriz* $\boldsymbol{A}$*.*

**Teorema 5.** *Se uma matriz* $\boldsymbol{A}$ *pode ser reduzida à matriz identidade, por uma sequência de operações elementares com linhas, então* $\boldsymbol{A}$ *é inversível e a matriz inversa de* $\boldsymbol{A}$ *é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.*

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes **A** e **I**, através de operações elementares, até chegarmos à matriz **I** na posição correspondente à matriz **A**. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz **I** será a inversa de **A**.

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}) \longrightarrow (\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1})$$

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocando a primeira e segunda linhas, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, somamos à quarta a primeira e à segunda, a primeira linha multiplicada por $-2$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Subtraímos a segunda linha da terceira, obtendo

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocamos o sinal da terceira linha e, subsequentemente, anulamos o resto da terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de $\mathbf{A}$ à direita.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

## V. Espaço Vetorial

*Propriedades:*

*i)* $(u+v)+w = u+(v+w)$
*ii)* $u+v = v+u$
*iii)* Existe $0 \in V | u+0 = 0$ (0 é chamado de vetor nulo)
*iv)* Existe $-u \in V | u+(-u) = 0$
*v)* $a(u+v) = au+av$
*vi)* $(a+b)v = av+bv$
*vii)* $(ab)v = a(bv)$
*viii)* $1u = u$

### A. Subespaço Vetorial

*Propriedades:*

*i)* $u+v \in W, \forall u, v \in W$
*ii)* $\alpha u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W$

$W_1 = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x$ $(0,0) \in W_1$ ? Sim. $\Rightarrow 0 = 2*0$

- Verifique se $W_1$ é um subespaço vetoria de $\mathbb{R}^2$: $W_1 = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x$
- Condição 1. $(a, 2a) + (b, 2b) = (a+b, 2a+2b) = (a+b, 2(a+b)) \in W_1$
- Condição 2. $\alpha(a, 2a) = (\alpha a, \alpha(2a)) = (\alpha a, 2(\alpha 2)) \in W_1$
- Verifique se $W_3$ é um subespaço vetoria de $\mathbb{R}^2$: $W_3 = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2$
- Condição 1. $(a, a^2) + (b, b^2) = (a+b, a^2+b^2) \ni W_3 \therefore a^2+b^2 \neq (a+b)^2$

## VI. Conclusion

The conclusion goes here [1] [2].


## Acknowledgment

The authors would like to thank...


## Referências


[1] J. Boldrini, *Álgebra linear*. São Paulo, SP: HARBRA, 1980.
[2] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations (3rd Ed.)*. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.